Ivica Martinović

Neprekidnina i beskonačnina od predsokratovaca do Newtona

Predavanje iz *Filozofije prirode I*
u zimskom semestru akademske godine 2007./2008.
na Filozofskom fakultetu u Splitu

1. Horizont problema

U kojem odnosu stoje egzistencija i kolikoća bića? Je li biće, sama njegova opstojnost, uvjetovana kolikoćom bića? Kakav odgovor na prethodno pitanje pruža postupak oduzimanja ili dijeljenja ako se stalno ponavlja? Znači li kolikoća nužno i konačnost? Kako se određuje i gdje se očituje beskonačnost? Što se postiže stalnim dodavanjem? U čemu se sastoji neprekinutost? Kakav je odnos dijela prema cjelini? Što je granica i postoji li granica? Ako granica postoji, gdje postoji i kako postoji?

Za čitav splet ovakvih pitanja koja se odnose na konačnost i beskonačnost, prekid i neprekinutost, dio i cjelinu, približavanje i granicu, djeljivost i kolikoću, u povijesti se filozofije i matematike ustalio stručni nazivak *problem neprekinutosti i beskonačnosti*.

Postavljena pitanja odnose se na temelje matematike i fizike, a to znači da se postavljaju u području trajnog i plodnog susretanja filozofije, matematike i fizike. Presudni pečat toj povezanosti i međusobnom utjecaju daje zajedničko ishodište filozofije i matematike u radovima Grkā. Tek su Grci s dostupnom im strogošću razumijevali osnovne *pojmove* neprekinutog i beskonačnog te svojim *analizama* utrli put svim onim misaonim obratima i dokazima do naših dana.

Izvorna značenja problema postavila su trajne putokaze u mnogobrojnim naporima za njegovo rješavanje. Mnogi su se mislioci i istraživači ponovo vraćali na staro raskršće, tu postavljali nova pitanja i pružali nove odgovore. Sva složenost i zamašnost pitanja očituje se tek onda kad se prijeđe taj milenijski povijesni put i na njemu uoče ključni pomaci, primjerice: Platonovi dijalektički modeli skoka i neprekinutog prijelaza, Aristotelova odredba neprekidnine, razvojni put indivizibila s primjenama u geometriji i aritmetici, postupna zamjena indivizibila graničnim postupkom u okviru infinitezimalne analize. Prikaz povijesnog razvoja[1] koji slijedi ograničava se na osnovne zamisli u vremenskom rasponu od grčkih početaka do Newtona.

2. Izvorna značenja

Pojmovi neprekinutog i beskonačnog prvi se put susreću u sačuvanim odlomcima predsokratovaca[2] i neposredno su povezani s prvom prešutnom filozofskom pretpostavkom o jedinstvu svijeta i s prvim filozofskim pitanjem: Što je pratemelj ili prauzrok svijeta? Jonjanin ANAKSIMANDAR (610-546) razumijeva da je jedinstveni praosnov svega *beskonačno*, pritom kvalitativno neodređeno, što je metafizički pojam za tvarnu pramasu, koja obuhvaća sve bez vremenskih i prostornih granica.[3] PARMENID (540-480) do krajnosti razvija pojam bitka time što postulira da bitak jest a nebitak nije, odriče zbiljnost mnoštvu i kretanju pojedinačnih stvari i pomišlja jedan nepokretan bitak, u sebi omeđen i miran, što poput kugle obuhvaća sve biće i isključuje sve nebiće. Biće se razumijeva kao nedjeljiva, istovrsna i *neprekinuto povezana* cjelina.[4]

Prvi spomen beskonačnog kod Anaksimandra i prvi spomen neprekinutog kod Parmenida izrazito su filozofskog značaja. Putevi daljnjeg razvoja vode i prema matematičkoj prosudbi neprekinutosti i beskonačnosti u njihovoj međusobnoj povezanosti. O tomu govore prvi do nas doprli tekstovi iz prve polovice 5. st. pr. Kr. Njihovi autori, suvremenici Zenon i Anaksagora, iskazuju začuđujuću podudarnost gledišta o beskonačnosti, premda su im motivi razmišljanja različiti.

ZENON ELEJSKI (490-430) svojim je aporijama ustao u obranu svog učitelja Parmenida kad je dokazivao da pretpostavke o kretanju, mnoštvu i djeljivosti vode k proturječnim stavovima i time da se bez proturječja dade pomišljati samo Jedno. Evo, dva primjera pobijanja mnoštva, koji ilustriraju kako je Zenon u svojim dokazivanjima koristio pojam beskonačnoga u dvostrukom smislu: *beskonačno veliko po broju* i *beskonačno malo po kolikoći*. Jednom je prilikom dokaz oslonio na postupak *dijeljenja*: ako biće jest, ono ima kolikoću i nužno svaki njegov dio ima stanovitu kolikoću; isti zaključak vrijedi i za dio uočenog dijela, pa prema tome i jednom zauvijek; neće se dogoditi da bi neki dio tvorio samu granicu i ostao bez odnosa prema svom dijelu. Zaključak je glasio: »Dakle, ako postoji mnogo bića, ona nužno moraju biti ujedno mala i velika: tako mala da nemaju kolikoće, tako velika da ih je neograničeno mnogo.«[5] U drugom je slučaju *umetanjem* obrazlagao da mnoštvo povlači neograničenost, izrijekom: »Ako postoji mnoštvo, onda bićā ima [brojem] neograničeno. Između bićā uvijek su druga bića, a između njih opet druga. I time je bićā [brojem] neograničeno.«[6]

Posredujući između Heraklitova i Parmenidova učenja, ANAKSAGORA (500? – 428) je izgradio vlastiti misaoni svijet. Preinačio je Parmenidov pojam bitka uvođenjem kvalitativno različitih supstancija ili sjemena. Prihvatio je mnoštvo i promjenu, ali i nadalje nijekao nebiće ili prazni prostor. Zato je materijalnom svijetu pripisao opću i *beskonačnu djeljivost*, koju prati beskonačno umanjivanje dijelova i povećavanje broja dijelova u beskonačnost. Pošavši od protivnih pretpostavaka, izrekao je o dvostrukoj beskonačnosti istu misao kao i Zenon: »Niti uz maleno postoji najmanje, nego uvijek još manje (tà nemoguće je da ono što postoji [diobom] prestane postojati, ali i od velikoga uvijek ima veće. A ono je malenomu jednako po množini. U odnosu na sebe svaka je stvar i velika i malena.« [7] Premda nije primijenio pojam kontinuuma, nemogućnost da se prodre do najmanjeg dijela ili nebića dokazivala je Anaksagori povezanost cjeline, koju je označavao, kako u prastanju svijeta tako i u svakom drugom trenutku, izrazom »biti zajedno«.[8]

Ovakvo je shvaćanje beskonačnosti odigralo svoju ulogu u rješavanju problema *kvadrature kruga*.[9] Sofist ANTIFON (5. st. pr. Kr.) u svojoj se argumentaciji služio jednim od mogućih poligona upisanih u krug. U jednoj prilici to je bio kvadrat, a u drugoj jednakostranični trokut (sl. 1). U polovištima stranica polaznog poligona povlačio je okomice, a zatim je – povlačeći spojnice od sjecišta tih okomica s obodom kruga prema vrhovima poligona – dobivao novi poligon s dvostrukim brojem stranica i uvijek manjim stranicama. Stalnim ponavljanjem ovog postupka »vjerovao je da će *iscrpljivanjem površine* na ovaj način krugu napokon upisati poligon kojega bi stranice zbog svoje malenosti mogle pokriti obod kruga«.[10] Komentator Aristotelove *Fizike* TEMISTIJE (320? - 390?) na primjeru je postupka s upisanim trokutom shvatio da Antifon ovakvim postupkom ukida *dijeljenje u beskonačnost*, što bi geometru onog doba bila temeljna pretpostavka. A drugi Aristotelov komentator IVAN FILOPON (6. st. n. e.) primijetio je da »Antifon time ukida geometrijske principe; jer geometrijski je princip da se pravac nikad ne podudara s kružnim lukom ...«[11]

Sl. 1. Antifonovi upisani poligoni

Pomak naprijed u obradi problema kvadrature kruga izvršio je pitagorovac ili sofist BRIZON (oko 410 p.n.e.) prvim preciznim *stavkom o neprekinutosti*: »One tvorevine, prema kojima su neke iste tvorevine dotično veće i manje, međusobno su jednake.«[12] Evo, kako ga je primijenio promatrajući, za razliku od Antifona i jednako kao kasnije Arhimed, istodobno upisane i opisane likove (sl. 2): »Krug je veći od svih njemu upisanih i manji od svih njemu opisanih poligona. Na isti se način odnosi i poligon ucrtan između upisanih i opisanih poligona. U odnosu na iste likove krug i ovaj (među)poligon onda su dotično veći i manji; prema tome, oba su jednaka po navedenom temeljnom stavu.«[13] Stavak u ovom obliku otvara široku raspravu. On naglašuje jedinstvenost lika koji leži između dvije grupe poligonā, a u pitanju egzistencije tog lika nije izričit. On je opći stavak jer ne precizira karakter tvorevinā, odnosno nije geometrijski stavak. Pitanje o tomu unutar kojih granica vrijedi – ostavlja otvorenim za različite odgovore. Podrazumijeva prolaz kroz međuvrijednosti: »Prelazi se od manjeg k većem i obratno preko svih srednjih vrijednosti; tada i preko jednake. U onome što je pred nama uspijeva, dakle, naći ili veće ili manje; dakle, uspijeva naći i jednako.«[14]

Sl. 2. Brizonov krug između opisanih i upisanih poligona

Pa ipak, unatoč tolikim prilikama za raspravljanje, stavak o neprekinutosti povezan s istodobnim promatranjem opisanih i upisanih likova poslužio je za brojne primjene. U prvom se redu to odnosi na Eudoksovo (4. st. pr. Kr.) učenje o mjerenju površina i tijela sa zakrivljenim granicama. Time je razvijena metoda, koja se u latinskoj literaturi sve do 18. stoljeća naziva *ope inscriptorum et circumscriptorum*.[15]

Usporedo i protivno pristupu, koji se temelji i razvija na pojmovima neprekinutosti i beskonačnosti, trajno je u antici prisutan i pristup koji svoja shvaćanja izgrađuje s pomoću pojmova konačne djeljivosti, diskretnosti, skoka i trenutka. Tom usporednom razvojnom pravcu također je svojstveno da kreće s filozofskog izvorišta i vodi primjeni izgrađenih matematičkih pojmova na probleme vlastite egzaktnim znanostima. Središnje mjesto među tim problemima pripada problemu *strukture tvari*, odnosno tumačenja sastava tvari s pomoću matematičkih, točnije geometrijskih objekata.

Pitagorovci su bili prvi koji su dosljedno razvijali *odnos prirode i broja*. Ustrajući na toj vezi, oni su u isti mah tumačili sastav svemira i istraživali brojevno područje. Egzistencija konačnih ili ograničenih stvari bila je za njih uvjet spoznajnog procesa, kako o tome svjedoči fragment iz kasnog 5. stoljeća, pripisan FILOLAJU: »Uopće ne bi mogao postojati ni predmet spoznaje ako bi sve bilo bez granice.«[16] Princip koji omogućuje da stvari razlikujemo i, dosljedno tome, spoznajemo jest broj. Zato konačnim stvarima odgovara zatvoreni brojevni sustav koji počinje s jedinicom i završava s deseticom.

Jezgri pitagorovskog nauka pripadalo je i razlikovanje koje uključuje pojam *granice*. Naučavali su da je »priroda u poretku svijeta sastavljena iz dijelova koji nemaju granicu i koji tvore granicu, kako poredak svijeta u cjelini tako i sve stvari u njemu«.[17] Paru bezgranično-ograničeno u prirodi odgovarao je odnos parno-neparno u brojevnom području, pa otud i radikalna protivnost parnog i neparnog broja u razumijevanju pitagorovaca.

U sklopu svog pothvata matematičke konstrukcije svemira pitagorovci su držali da je crta sastavljena od točaka koje se odlikuju kolikoćom kao nužnim atributom egzistentnosti. Moralo ih je, dakle, biti konačno mnogo, premda nije bilo utvrđeno koliko konačno mnogo. Usprkos toj neodređenosti, dvije različite crte mogle su se uspoređivati po broju točaka. Ali je vjerojatno već u prvoj polovici 5. stoljeća nastupio momenat koji je doveo u pitanje ovakvo razumijevanje konačnosti: otkriće nesumjerljivosti stranice i dijagonale kvadrata.

Iako se pitagorovski nauk otada nalazio u preispitivanju, svejedno je još DEMOKRIT na prijelazu iz 5. u 4. stoljeće dijelio pitagorovska stajališta da su crta, površina i tijelo izgrađeni iz nedjeljivih sastavnih dijelova, svojevrsnih atoma u geometrijskom području. Dapače, ta su stajališta poslužila Demokritu za elementarno razmatranje o određivanju volumena stošca. [18] Atomističko učenje zahtijevalo je i atomističku matematiku.

1.3. *Pitagorovska tradicija i dijalektički modeli u Platona*

Pitagorovska tradicija konačne djeljivosti geometrijskih tvorevina poprimila je svoj novi, osebujni izraz u Platonovoj filozofiji prirode, koju u zgusnutom obliku donosi dijalog *Timaj*. Zbog osnovne strukture Bog – svemir – čovjek i zbog izvorne Platonove zamisli o demijurgu, tvorcu koji poput umjetnika oblikuje svemir, ovo je djelo stoljećima uživalo glas glavnog Platonova djela i odlučno doprinijelo prijemu Platonovih gledišta na Zapadu. U okviru mnogobrojnih prevodilačkih pokušaja i teoloških tumačenja *Timaja* prije svega su bile izlagane te osnovne Platonove zamisli, ali je obrađivana ili bar doticana i ideja konačne djeljivosti koja je s njima neposredno povezana, pa je ovdje valja izložiti, prije svega zbog njezina odjeka koji traje stoljećima.

Služeći se mitskim govorom kao prokušanim sredstvom grčkoga umovanja, Platonov Timaj uklopio je pojam konačne djeljivosti u svoj govor o postanku svijeta. Na početku svog velikog monologa on kaže da je demijurg svemir »sastavio kao jedno vidljivo živo biće, koje unutar sebe sadržava sva živa bića njemu po prirodi srodna.«[19] U skladu s tim valjalo je zamisliti njegovo rođenje odnosno razvitak do potpunog oblikovanja. Zato je demijurg najprije sastavio dušu svemira: sjeme njegovog nastanka, plan njegovog razvoja i svrhovitu organizaciju materije u kaotičnom kretanju. Ona je ishod smjese triju zasebnih »rodova«: Istog, Različitog i bića, ali tako da je svaki od tih rodova sastavljen od nedjeljivog dijela i od djeljivog dijela koji nastaje u dodiru s tijelima, odnosno postaje djeljiv kroz tijela. Ta postavka ima svoj neposredni pitagorovski izraz u *diferenciranju duše svemira*, odnosno izdvajanju njezinih dijelova s pomoću dvaju konačnih geometrijskih nizova s količnicima 2 i 3 kao prvim parnim i neparnim brojem uključujući harmonijske i aritmetičke sredine njihovih članova.[20] Takav matematički ustroj svjetske duše postaje principom prepoznavanja djeljivog i nedjeljivog, tako da duša, »kad god naiđe na nešto što sadržava djeljivost kao i na nešto što sadržava nedjeljivost, cjelokupnim svojim kretanjem govori čemu je to jednako, a od čega različito.«[21]

Razmotrivši sastav duše svemira, Timaj je proslijedio govoriti o uređenju samog svemira.[22] Pritom je pošao od neuređenog svemira, svemira koji se nalazi u stanju u kojem se vjerojatno nalazi sve iz čega je odsutan tvorac, tek s tragovima vlastite prirode, ali sa sposobnošću oblikovanja. Oblici koje demijurg razlučuje: vatra, zemlja, voda i zrak prepoznaju se kao geometrijska tijela. Daljnje pronicanje svemira dostupno je samo geometrijskim znalcima: »Valjda je svakomu jasno da su vatra, zemlja, voda i zrak ponajprije tijela; a bîti svakog tijela pripada da posjeduje prostornu protežnost. Nadalje, prostorna protežnost oko sebe mora nužno imati površinu, a svaka ravna osnovica sastoji se od trokutā. Svi trokuti pak potiču od dva, od kojih svaki ima jedan pravi i dva oštra kuta.«[23] U konačno mnogo koraka Platonov Timaj dospio je do *temeljnih sastavnica uređenog svemira*. To su dva osnovna pravokutna trokuta, jednakokračni pravokutni trokut i polovica jednakostraničnog trokuta (sl. 3), kao dvodimenzionalne ili površinske tvorevine koje ne podliježu daljnjoj raščlambi na ravne crte i točke, što predstavlja izričiti otklon od pitagorovskog nasljeđa. S pravom ih se može nazvati »elementarnim česticama« Platonove teorije prirode. Preko njih se konačna djeljivost geometrijskih tvorevina očituje i u misaonom svijetu poznog Platona.

Sl. 3. Platonove temeljne sastavnice uređenog svemira

Naprotiv, u brojevnom području Platon je razmatrao *pričin dviju neograničenosti*. Nije mogao zaobići postojeću tradiciju o beskonačnim postupcima, ali ih je obrađivao na razini pojave ili pričina, kad je već za konačne postupke rezervirao pojmovnu analizu. Tako je i tu došla do izražaja radikalna opreka dvaju Platonovih svjetova: svijeta idejā koje se spoznaju pojmovima i svijeta pričinā o kojima postoji mnijenje na temelju opažajā.

Platonovo mišljenje priopćio je Aristotel unutar analize beskonačnoga koju je poduzeo u svojoj *Fizici*. Prema tom svjedočanstvu »Platon je pretpostavio dvije neograničenosti, jer se pričinja da se kako dodavanjem tako i oduzimanjem preko svake mjere ide prema neograničenom. Ipak, pošto ih je dvije postavio, nije ih koristio jer kod brojeva ne postoji neograničeno niti u smislu oduzimanja jer je jedinica ipak najmanja, niti u smislu dodavanja jer je brojeve postavio samo do desetice.«[24] Pristanak uz konačni brojevni sustav pitagorovaca Platonu je, dakle, bio razlogom što u svom svijetu idejā nije mogao provesti beskonačne postupke niti ih je mogao pojmovno analizirati. Svejedno je u dijalogu *Fileb* kušao izraziti brojevni sadržaj beskonačnosti pitajući se

»uključuje li ona u sebi sve protivnosti – u prvom redu jednako i jednakost, poslije jednakog dvostruko i sve što se odnosi kao broj prema broju ili mjera prema mjeri.«[25] Beskonačnost je tako za Platona predstavljala sve bogatstvo brojevnih odnosa i geometrijskih omjera i on ju je izričito lučio od granice, kojoj je dodijelio sve što beskonačnost ne nosi u sebi, tj. u njoj je vidio princip koji nesavršenost i nepreglednost neograničenosti ukida u ljepoti, zakonu i uređaju.[26] Tako je i u *razlikovanju neograničenosti i granice* razmišljao na tragu pitagorovskog nauka.

Konačno, Platon je prilikom vježbanja u dijalektici u drugom dijelu dijaloga *Parmenid* tematizirao *mogućnost prijelaza* u dvama njegovim oprečnim oblicima: *skoku* i *neprekinutosti*. Iz mnoštva prijeporā Platonove vježbaonice, u kojoj se ispituju suprotstavljene tvrdnje u težnji prema savršenoj izvježbanosti, mogu se izdvojiti dva Platonova tumačenja koja pobuđuju prirodnofilozofski interes. Za izbor tih tumačenja nije presudan opći filozofski sklop Platonovih razmatranja, niti raznolikost postojećih tumačenja izabranih mjesta, a ne postavlja se ni pitanje da li se tim mjestima izriče ili pobija Platonov stav. Tà o vježbanju je riječ, pa je za taj izbor odlučno kako se vježba odvija, koje se obrazloženje koristi i koji se misaoni model nudi.

Prvo izabrano tumačenje prijelaza nalazi se u okviru Platonova ispitivanja kako protumačiti *kretanje*, odnosno kako posredovati izmedu kretanja i mirovanja.[27] Platon ponajprije uočava da postoji vrijeme kad Jedno sudjeluje u bitku i vrijeme kad ono napušta bitak. Time hoće reći da se taj odnos uspostavlja unutar vremenskog horizonta, a zatim da se odvija u različitim vremenima, tako da sudjelovanju u bitku pripada oznaka nastajanja, a napuštanju bitka oznaka nestajanja. U istom smislu Platon ustraje da jedan predmet u jednom vremenu može mirovati, u drugom, različitom od prvog, može se kretati, ali da ne postoji isto vrijeme a da bi moglo biti niti da se kreće niti da miruje.

Takvim logičkim izvođenjem dospio je do oprekā ulaženje-napuštanje, nastanak-nestanak, kretanje-mirovanje. Novost je da ih nije ukinuo tako što bi u tim napetostima jedan element suprotstavio drugome, nego ih je održao uvođenjem skokovita prijelaza koji se nužno mora zbiti izvan vremena a da ujedno omogućuje obrat prema obadvjema stranama napetosti. Taj skok koji se zbiva izvan vremenskog horizonta Platon je nazvao »trenutak«. Njemu pripada posrednička uloga, on je način preokreta i jedan model onoga »između« Platonova dijalektičkog vježbanja. Sažeto bi se model skoka dao izreći: ni kretanje, ni mirovanje, dakle trenutak.

Drugi argumentacijski model matematičke je naravi i rasvjetljava *odnos između velikoće i malenoće* ili, kako bismo danas rekli, odnos većeg i manjeg. Evo Platonova obrazloženja:

»Ali veličina i malenost uvijek su udaljeni jedno od drugoga.
Potpuno.
Dakle, uvijek se nešto nalazi između njih.
Nalazi se.
Možeš li ti naznačiti nešto drugo što bi između njih bilo nego jednakost?
Ne, nego baš nju.
Onda, dakle, gdje ima veličine i malenosti, ima i jednakosti koja se nalazi između njih.«[28]

U ovom slučaju ono »između« zove se *jednakost*. Njom se osigurava prijelaz posve slično Brizonovu stavku o neprekinutosti.[29] U pitanju je model neprekinutosti: i velikoća, i malenoća, dakle jednakost.

1.4. *Potencijalna beskonačnina i neprekidnina u Aristotela*

Zenonova bezizlazja i Platonov dijalektički model u dva su oprečna oblika tematizirali pojavu kretanja, a beskonačni postupci i nedjeljive veličine u dotadašnjoj su grčkoj matematičkoj misli služili za premjeravanje istih zakrivljenih površina i tijela. S ta se dva suprotstavljena pristupa suočio ARISTOTEL (384 - 322) u trenutku kad je poduzimao svoju sintezu i sebi namijenio ulogu mirovnog suca.[30] U ovom teškom pitanju on je prvi poduzeo sustavno ispitivanje i izvršio stroga pojmovna razlikovanja. Njegovo ću rješenje izložiti vjerodostojnim redoslijedom, redoslijedom razmatranja u njegovoj *Fizici*.[31]

U odmjeravanju za i protiv Aristotelov je mirovni pravorijek glasio: beskonačnina postoji, prema tomu nije teško dokinuti nauk o »nedjeljivim dijelovima«. Trebalo je, dakako, obrazložiti da beskonačnina postoji i rastumačiti kako postoji, jednako kao što je trebalo objasniti kako to da nedjeljivi dijelovi ne postoje i otkriti čemu u tom slučaju vodi postupak dijeljenja.

Aristotel navodi najviše pet razloga za postojanje beskonačnine: »prvo iz vremena, jer je ono beskonačno; drugo iz dijeljenja kolikoćā, jer i matematičari upotrebljavaju beskonačninu; treće odatle što jedino na taj način u nastajanju i propadanju nema prestanka, ako već postoji beskonačnina od koje se uvijek oduzima ono što je nastalo; četvrto odatle što ograničeno uvijek ima granicu u odnosu na nešto što zapravo nužno nije granica, ako jedno u odnosu na drugo nužno uvijek mora imati granicu; i peto, u najvećoj mjeri i najistinskije zbog onoga što prouzrokuje svima zajedničku poteškoću, naime, otud što u mišljenju nema prestanka čini se da je beskonačan i broj, i matematičke veličine, i ono što je izvan nebeskog sustava.«[32] Cjelokupni razvoj matematičkih postupaka i fizikalnih tumačenja upozoravao je Aristotela da pojam beskonačnine krije znatne poteškoće, te se jednom čini da ona postoji, a drugi put da ne postoji. U odnosu na tu dvojbu Aristotel vrši ključni pomak naprijed kad između dvaju načina postojanja svega što jest, potencijalnoga i aktualnoga, za beskonačninu izabire potencijalni način postojanja: »Beskonačnina biva samo po potenciji.«[33] Pritom se slikovito izražava dajući negativan i pozitivan primjer potencijalne egzistencije. Postojati po potenciji ne znači biti u mogućnosti postanka prema kojoj ono iz čega je moguće napraviti kip jednom doista i postane kip, već to znači biti u mogućnosti da postaneš na način kao što postaje dan ili natjecanje, dakle da postaješ opet i opet, svaki put određen, a svaki put drugi.

U skladu s tom predodžbom Aristotel jasno određuje *potencijalnu beskonačnost*: »Beskonačnina uopće postoji u smislu da se uzima uvijek drugo i opet drugo, a to što se uzima uvijek je ograničeno, ali i uvijek i opet različito.«[34]

Uz ovakvu pojmovnu odredbu on sad može utvrditi kako se potencijalna beskonačnina očituje prilikom primjene dvaju matematičkih postupaka – dodavanja i dijeljenja, u dvama različitim područjima, naime kod brojeva i kolikoćā. Za njega pritom postoje dvije vrste beskonačnine: beskonačnina ‘dodavanjem’ i beskonačnina ‘dijeljenjem’. Analiza uporabe beskonačnine vodi ga prema zaključku »da kod brojeva postoji granica u smislu naniže, dok se u smislu naviše može premašiti svaka množina; naprotiv, kod kolikoćā može se u smjeru prema manjem premašiti svaka kolikoća, a u smjeru naviše ne postoji beskonačno velika kolikoća.«[35]

Odatle slijedi dalekosežan zaključak da numeričke i geometrijske kolikoće imaju oprečna svojstva. Time postignuto *razdvajanje aritmetike i geometrije* konačan je rezultat procesa koji svoje ishodište ima u problemu nesumjerljivosti i ujedno važna odrednica razvoja matematike sve dotle dok je aristotelovsko nasljeđe igralo djelatnu ulogu u egzaktnim znanostima.

Ali je u istoj mjeri dalekosežno i Aristotelovo obrazloženje zauzetoga stava. Stvarno, zašto kod brojeva postoji samo beskonačnina dodavanjem, a ne i dijeljenjem, i zašto je kod kolikoćā posrijedi beskonačnina dijeljenjem, ali ne i beskonačnina dodavanjem? Uzrok tomu grčko je shvaćanje broja i izvorno Aristotelovo razumijevanje *neprekidnine*.

Govoreći o brojevima, Aristotel isključivo misli na prirodne brojeve, naravno današnjom terminologijom rečeno. Razlog tomu da se kod brojeva dopire do jedinice, i u smjeru prema manjem ne može se doprijeti dalje, leži u svemu što je uvijek samo jedno, primjerice čovjek je jedan čovjek, a ne mnogo ljudi. Broj je otuda količinski mnogo jedinicā.

A kad govori o kolikoćama, najčešće pomišlja na dužinu ili crtu, premda isto vrijedi za sve geometrijske kolikoće. S kolikoćom je drugačije nego s brojem. Očitovanje beskonačnine u postupku dijeljenja, upotrebljavano u tolikim matematičkim razmatranjima, sili Aristotela da pomnije prouči pojavu djeljivosti, pogotovo što s njom u vezi stoji čitava jedna pojmovna zbrka. Jer, pita Aristotel, što je podudarno, a što odijeljeno, u čemu se sastoji dodirivanje, a u čemu umetanje, što znači uslijediti, a što srasti? Sama ova pitanja pokazuju da se među kolikoćama i, općenito, među različitim a istovrsnim stvarima mogu uspostaviti različiti načini povezanosti. Aristotel ih pojmovno razlikuje tri.

Redoslijed se određuje time da između njegovih članova ne leži ništa njima istovrsno. Izvrstan primjer za takvu povezanost jesu brojevi, naravno onako kako ih Aristotel shvaća. *Dodirnina* postoji tamo gdje se krajevi stvarī poklapaju, odnosno gdje između granica dviju stvari ne leži ništa drugo. Primjer je bilo kakvo slaganje jednog predmeta do drugog. *Neprekidnina* prema Aristotelovim riječima postoji ondje »gdje se krajevi, kojima se dva predmeta dotiču, stapaju do potpunog identiteta i tako, kao što sama riječ označuje, povezuju predmete.«[36] Takva definicija uključuje: prvo, prepoznavanje dijelova, napose izvanjskih dijelova; drugo, doticanje predmetā, dakako njihovim granicama; treće, povezivanje predmeta s pomoću granice, odnosno utvrđivanje granice kao brojem jedne granice. A primjer takve povezanosti moglo bi biti kalemljenje mladice.

I redoslijed i dodirnina i neprekidnina izražavaju povezanost različitih predmeta iste vrste. A odnos koji među njima postoji jedno je stupnjevanje. Idući od redoslijeda prema neprekidnini, povezanost se svaki put izražava na kvalitetno novi način. Aristotelovim riječima: »A i očigledno je da je pritom prvotna slijednina, jer dodirnina nužno mora biti slijednina, a sve što je slijednina ne mora nužno biti dodirnina. Zato je u stvarima koje su pojmom prvotnije, primjerice u brojevima, samo slijednina, ne i dodirnina. A je li štogod neprekidnina, mora nužno biti dodirnina; obratno, ako je što dodirnina, time još nije neprekidnina.«[37]

S pomoću ovako shvaćene neprekidnine može se obrazložiti zašto se u postupku dijeljenja kolikoćā javlja potencijalna beskonačnost. Štoviše, *neprekinutost izravno povlači djeljivost u beskonačnost.* Aristotel provodi dokaz od suprotnog. Neka neprekinutost povlači konačnu djeljivost, odnosno djeljivost samo do nedjeljivih dijelova. »A kako je nedjeljivo bez dijela, to bi se nužno moralo doticati cijelo s cijelim; a dodiruje li se kao cijelo s cijelim, ono upravo nije neprekinuto, jer neprekinuto na sebi sadrži jedan dio kao ovaj, a drugi dio kao onaj, i dijeli se na dijelove koji su u tom smislu različiti i po mjestu odijeljeni.«[38]

Aristotel s velikom učestalošću predočuje ovu implikaciju. Obično inzistira na očitovanju potencijalne beskonačnine u postupku dijeljenja, protivno aktualnom dijeljenju koje susrećemo u Zenonovim paradoksima. »Zovem neprekinutim ono što je djeljivo u uvijek dalje djeljivo.«[39] Ali postoji oblik, izravno uperen protiv pitagorovskog razumijevanja geometrijske kolikoće: »tà nemoguće je, da od nedjeljivog nastane neprekinuto, primjerice od točaka crta, ukoliko je crta neprekinuta, a točka nedjeljiva.«[40]

Oba ova pojavna oblika samo su dvije strane iste tvrdnje, tako da se i stoljećima kasnije pojavljuju kao dva dijela iste skolastičke teze:

continuum non componitur ex indivisibilibus;

continuum in infinitum est divisibile.

Pojam neprekinutosti, a samim tim i pojam djeljivosti u beskonačnost kao neposredni izraz neprekinutosti, omogućuju Aristotelu da ponudi novo rješenje za *problem kretanja*. Niti je tako da gibanja nema kao što hoće Zenon svojim aktualnim dijeljenjem u beskonačnost, niti je tako da se iz mirovanja može prijeći u gibanje skokom izvan vremenskog horizonta kao što hoće Platon, nego prvo valja prepoznati istovrsno ustrojstvo kolikoće, gibanja i vremena.[41] Onako kako je utemeljena kolikoća, dužina ili put, mora biti utemeljeno i kretanje koje se događa duž te kolikoće, a onako kako je utemeljeno kretanje, mora biti utemeljeno i vrijeme u kojem se kretanje zbiva. To Aristotel pokazuje istražujući odnos kolikoće i gibanja uz pretpostavku nedjeljivih dijelova i istražujući odnos gibanja i vremena uz pretpostavku djeljivosti u potencijalnu beskonačnost. A to znači da iz neprekinutosti kolikoćā, koju je prethodno utvrdio u procesu definiranja neprekidnine, na temelju istovrsne strukture kolikoće i gibanja slijedi neprekinutost gibanja, a otuda na temelju istovrsne strukture gibanja i vremena slijedi neprekinutost vremena.

Neprekinutost gibanja znači, dakako, djeljivost gibanja u beskonačnost. Zamisli li se gibanje kao neki imaginarni put, bit će uvijek principijelno moguće doći do nove daljnje točke tog puta, bit će moguće zamisliti da je svaka točka puta doseziva, te da će ih biti beskonačan broj, ali uvijek tako da se iz svake točke tog imaginarnog puta, koji predočuje kretanje, može osvrnuti na početak gibanja i prozirati do cilja gibanja. Time se uz beskonačni postupak dijeljenja uspijeva prepoznati gibanje kao jedno gibanje, odnosno uspijeva se sačuvati *cjelina gibanja*.

Neprekinutost kretanja postaje osnovnom zasadom Aristotelove filozofije prirode. S pomoću neprekinutosti Aristotel utemeljuje svoju teoriju nepokrenutog Pokretača, koji uzrokuje kružno gibanje sfere zvijezda stajaćica kao prvo i najsavršenije gibanje, a onda se to gibanje prenosi prema nižim sferama. Zbog svojih gledišta o neprekinutosti on odbacuje Demokritovo shvaćanje svjetlosti kao struje atoma, pa smatra da se svjetlost širi kao vibracija prozirnih sredstava, slično valovima vode. Idejom neprekinutosti također tumači prijelaz od bilinskog prema životinjskom svijetu, premda pojam neprekinutosti tu ne koristi u strogom smislu, tj. u smislu da neprekidnina postoji samo unutar vrste.

1.5. *Dinamički kontinuum stoičara*

Aristotelova odredba neprekidnine postala je predmetom kritičkog propitivanja već među njegovim neposrednim nastavljačima. Ono se zbog svježine novoga, pojmovne jasnoće i širine primjene na pojedinačne pojave u prirodi nametnulo peripatetičarima kao nezaobilazna prirodnofilozofska tema, bez obzira što su svojim umovanjem namjeravali: braniti, dotjerivati ili preinačavati Aristotelovo učenje.

Sačuvani ulomci upozoruju da se među peripatetičarima posebno izdvaja STRATON iz Lampsaka (3. st. pr. Kr.), čelnik peripatetičke škole 287-269, poznat pod nadimkom »fizičar«.[42] On nastoji prevladati temeljni Aristotelov dualizam materije i forme, nužnosti i svrhovitosti jednostavnom naturalističkom preinakom. Pojave u prirodi ne nastaju djelovanjem duhovnog uzroka izvan prirode, nego se zbivaju po nužnosti koja je imanentna prirodi samoj. A ta se nužnost u prirodi ne iskazuje gibanjem atoma i kvantitativnim odnosima već isključivo *kvalitetima* i silama koje izvorno pripadaju tijelima, dakle oprečno Demokritovu i sukladno Aristotelovu nauku. Značenje kvalitetā tijela otada postaje važnom konstantom aristotelovskog nasljeđa.

U skladu sa svojim osnovnim filozofskim pogledima Straton razmišlja i o ustroju gibanja. Ono stoji samo za sebe, a neprekinutost mu se očituje u tome da nigdje ne nastupa *prekid* i da se proces dijeljenja gibanja provodi u beskonačnost, pa je svaki odsječak neprekinutog gibanja opet neprekinut. To se odnosi na svako gibanje, što znači da Straton ukida odlikovani položaj kružnoga gibanja, koji utemeljuje Aristotelovu astronomsku sliku svljeta. Tako se u Stratonovoj filozofiji prirode, premda pojam neprekinutosti gubi od svoje izvorne, aristotelovske jasnoće, poopćuje neprekinutost gibanja. A kako se gibanje, prostor i vrijeme prema Aristotelovoj zamisli odlikuju istim ustrojem, to se odražava i u Stratonovim gledištima o vremenu i prostoru. Vrijeme je neprekinuto, no uz primjedbu da ga se ne smije izjednačiti s brojenjem, a i prostor je neprekinut, ali tako da ga tvar neprekinuto ispunja.

Stoička filozofija prirode polazi od istih osnovnih zasada iz kojih se razvija Stratonova peripatetička filozofija, ali nedvojbeno nadmašuje tu filozofiju, osobito u dosljednom razvijanju novog razumijevanja neprekinutosti.[43] Istražujući narav svemira stoičari razmatraju tri mogućnosti koje postoje za svako tijelo: ili je ono jedinstveno, ili je sastavljeno od povezanih elemenata, ili je sastavljeno iz odijeljenih elemenata, te se odlučuju za svemir kao *jedinstveno* tijelo.[44] U to ih uvjerava *simpatija* koja djeluje u svemiru, a očituje se primjerice u djelovanju Mjeseca i zvijezda na prilike na Zemlji. U kozmičkoj simpatiji oni prepoznaju djelovanje *pneume* koja potpuno prožima i objedinjuje sav svemir. Zbog toga stoičari svemir i shvaćaju kao *dinamički kontinuum*.

Pojedinačne pojave ili promjene u svemiru zbivaju se po određenju koje dolazi od cjeline takvog svemira tj. po poretku nužnosti, slično kao i u Stratonovu shvaćanju. Samo što nužnost ovdje poprima konkretan lik u kojem se prepoznaje ideja neprekinutosti. Niz uzrokā (*series causarum*) koji proizvodi pojedinačnu pojavu nema prekida. Sve događaje u svemiru predodređuje »vječno, neprekinuto i zakonomjerno gibanje«.[45] U tom se gibanju ne uočava kvantitativni odnos, kvaliteti se kao i kod peripatetičarā pridijeljuju tijelima, a promjene koje nastaju na tijelima kvalitativnog su karaktera.

Svako pojedino tijelo posjeduje dinamički ustroj.[46] Njegova kolikoća ne može se utvrditi jasno određenom, statičkom granicom, s pomoću koje Aristotel uvodi pojam neprekidnine. Po shvaćanju stoičara, u odnosu na postavljene međe pojavljuje se uvijek još nešto s onu stranu pretpostavljenog po čemu se dotično tijelo usađuje u beskonačnost i neograničenost. Nije precizirano kako se pojavljuje to što se pojavljuje, odnosno o kojem se postupku tu radi, ali je očito da tijelo biva neprekinuto po *beskonačnom sklopu omeđenjā*, u kojem sklopu nema krajnjeg, ni prvog ni posljednjeg, omeđenja. U toj se ideji može prepoznati daleki nagovještaj graničnog procesa.

I vrijeme je neprekidnina. Postupak koji očituje njegovu neprekinutost isti je onaj egzaktni postupak koji se susreće kod Aristotela: djeljivost u beskonačnost. Stoga stoičari i zaključuju da nema najkraćeg elementa vremena i ne dopuštaju nedjeljivost sadašnjeg trenutka jer je on u isti mah dijelom budućnost i dijelom prošlost. [47]

Ideja neprekinutosti prožela je sve stoičko prirodnofilozofsko mišljenje. Moglo bi se reći da se tu dogodio svojevrsni obrat u odnosu na Aristotelovu analizu neprekidnine. Tok Aristotelova razmišljanja išao je od odredive granice predmeta ili lokalnog gibanja uz očitovanje beskonačne djeljivosti do očuvanja cjeline predmeta ili gibanja. A tok stoičkog razmišljanja imao je obratni smjer: od dinamičke cjeline svemira uz specifičnu djeljivost prema dinamičkoj međi pojedinačnog tijela. Aristotel je cjelinu morao prepoznavati, a stoičarima je ona bila unaprijed dana. Zato stoički postupci nemaju aristotelovsku egzaktnost.

1.6. *Jedinstvo i tijek od grčkih novoplatonovaca do renesansnih platonovaca*

Učenje PLOTINA (204-270), a zatim i ostalih neoplatonovaca, nadovezuje se na stoičko shvaćanje dinamičkog jedinstva svemira i obogaćuje značenje neprekidnine novim pristupima. Obrazlažući postojanje pojedinačnih tijela i tvari uopće Plotin tvrdi: sve, što postoji, postoji po Jednom; složene tvorbe postoje samo po jedinstvu; kako diobom gube to jedinstvo, one se i sržno mijenjaju.[48] Pritom se *jedinstvo tijela* ostvaruje po neprekinutosti, a utemeljuje ga djelovanje duše, koja je cijela u svim dijelovima i u svakom dijelu tijela.[49] Duša sa sebi svojstvenom neprekinutošću objedinjuje tijelo. Jednako tako ona neprekinutim prelaskom iz jednog u drugi životni oblik utemeljuje vrijeme kao *slijedninu*. U spoznajnom procesu duša se u stanovitom smislu odijeljuje od stanja jedinstva i mimoilazi Jedno, jer upada u broj i mnoštvo.[50] Tu je već posrijedi umovanje u kojem se problem neprekinutosti izražava isključivo kao problem teorije spoznaje.

Uz ove filozofske poglede javljaju se među neoplatonovcima i predodžbe koje se odlikuju neposrednim geometrijskim nadahnućem. To posebno vrijedi za PROKLA (412-485), značajnog komentatora Euklidovih *Elemenata*. Tumačeći Euklidovu definiciju crte on još jednom, poslije Seksta Empirika, oživljava ideju da crta i osobito pravac nastaju *tijekom* točke.[51]

Time on poopćuje Euklidovo shvaćanje, izraženo prilikom definiranja *zakrivljenih* prostornih oblika: kugle, stošca i valjka, te osnovicā stošca i valjka. [52] Prema Euklidu, primjerice, stožac nastaje rotacijom pravokutnog trokuta, ako jedna kateta trokuta ostaje nepokretnom, a trokut se okreće sve dotle dok se ne vrati u položaj iz kojeg je započeo svoje kretanje. Osnovica stošca jest krug kojeg opisuje kateta trokuta. U svim navedenim slučajevima tijelo nastaje kretanjem površinskog lika, a površinski lik nastaje kretanjem crte, te se tijelo i površinski lik definiraju onako kako i nastaju. Analogno postupa i Proklo – govoreći o crti. Ne izdvajajući nikakve posebne slučajeve, on je definira onako kako nastaje: kao tijek točke.

Istodobno, Proklo se suprotstavlja Aristotelovu tumačenju odnosa crte i točke. Statičkoj ideji *međe*, kojom se po Aristotelu uspostavlja odnos nedjeljive točke i beskonačno djeljive crte, on suprotstavlja svoju dinamičku ideju tijeka.

ALBERT VELIKI (1206(?)-1280) uvažava oba pristupa, lučeći materijalno i formalno gledište pri utvrđivanju odnosa neprekidnine i međe. S materijalnog gledišta točka je tek akcident neprekidnine na koju svakako spada ono što je povezano, a s formalnog gledišta ona je supstancijalna forma neprekidnine kojoj pripada i ono što je povezuje. A to je točka, shvaćena ne samo kao međa koja povezuje dijelove crte, već i kao princip iz kojeg crta »istječe«.[53]

Mišljenje Alberta Velikog javlja se u novim povijesnim okolnostima. Ono predstavlja prilog živoj diskusiji koja se o pojmu neprekidnine razvila u procesu upoznavanja i tumačenja Aristotelovih spisa, osobito *Fizike*, u europskim središtima u 12. i 13. stoljeću. Dapače, raspravljanje problema neprekinutosti obilježilo je cijelu skolastičku epohu. Iznesena obrazloženja bila su matematičke, fizičke i metafizičke naravi.

Shvaćanje s najdalekosežnijim utjecajem bilo je shvaćanje TOME AKVINSKOG (1225-1274), vjernog i jasnog tumačitelja Aristotelove *Fizike*.[54] Pojmom neprekidnine izražava se odnos cjeline i dijela, pa se taj pojam na temelju Aristotelove analize definira dvojako, ovisno o tomu polazi li se od cjeline ili od dijela:

1. Polazeći od dijelova (*secundum viam compositionis*) pojam neprekidnine određuje se povezanošću dijelova s pomoću *jedne zajedničke granice*.
2. Polazeći od cjeline (*secundum viam resolutionis*) pojam neprekidnine određuje se *djeljivošću u beskonačnost*. Odatle slijedi da se neprekidnina ne može sastaviti od nedjeljivih dijelova, ali se dopušta da neprekidnina ima nedjeljivu granicu.

Usporedo s aristotelovskim shvaćanjima javila su se početkom 14. stoljeća različita učenja o postojanju indivizibila. U prilog beskonačnoj djeljivosti navodio se Aristotelov metafizički dokaz, a u prilog postojanju indivizibila obično su se spominjala tri matematičko-fizička razloga:

1. Put savršene kugle po savršeno glatkoj površini, koja tijekom svog kotrljanja u bilo kojem trenutku dodiruje površinu u *jednoj* točki, crta je, nastala od točaka.
2. Površina tijela reflektira svjetlost, pa mora biti nešto realno.

3. Vrijeme posjeduje svoju realnost samo na temelju jedne točke sadašnjosti koja u njemu aktualno postoji.

U prvoj polovici 14. stoljeća vladao je potpun pluralizam u tumačenjima neprekidnine. Jedan od sudionika rasprave THOMAS BRADWARDINE (1290-1349) u svom djelu *De continuo* (*O neprekidnini*, oko 1330) sva je antička i srednjovjekovna tumačenja pregledno sveo na pet različitih shvaćanja o tome kako je sastavljena neprekidnina:

1. dijelovi koji se mogu uvijek iznova dijeliti (Aristotel, Averroes);
2. nedjeljiva tjelešca (Demokrit);
3. konačno mnogo točaka (Pitagora, Platon, Walter Catton kao piščev suvremenik);
4. beskonačno mnogo neposredno (dodirom) povezanih točaka (Heinrich von Harclay, takoder piščev suvremenik),
5. beskonačno mnogo posredno povezanih (odijeljenih) točaka (Grosseteste, pogrešno shvaćen).

Iako je aristotelizam, uobličen u skolastički sustav, izvršio snažan prodor na sva područja ljudskog znanja i umijeća, ipak se ideja indivizibila uspjela održati u 14. i 15. stoljeću, prije svega zahvaljujući poimanju *promjene* kvalitetā, danas bismo rekli fizičkih veličina, kao i promjenama u slici svijeta.

Krajem 14. stoljeća izvornom i povijesno značajnom primjenom indivizibila izdvaja se NICOLE ORESME (1323-1382). On djeluje pod neposrednim utjecajem shvaćanja Merton Collegea i Oxfordske škole o promjenjivosti kvaliteta, ali je prvi koji promjenu kvaliteta, odnosno stupanj intenziteta ma kojeg kvaliteta povezuje s geometrijskom predodžbom.[55] Tako se kvalitet koji se linearno proteže prikazuje s pomoću pravokutnika. Prostiranje kvaliteta (*extensio*) izražava se osnovicom, a napon kvaliteta (*intensio*) ili njegov stupanj visinom pravokutnika. Taj prikaz služi za predočivanje puta koji tijelo prijeđe jednoliko ubrzanim gibanjem. U tom je slučaju promjenjivi kvalitet koji se odlikuje linearnom protežnošću *brzina*, što znači da je indivizibilni pravokutnik stegnut na crtu kojoj krajnja točka opisuje trenutno trajanje brzine, a dužina stupanj intenziteta brzine u tom trenutku. Uz pomoć ove predodžbe Oresme je dokazivao temeljni kinematički stavak, poznat još u Merton Collegeu, da je put koji tijelo prijeđe jednoliko ubrzanim gibanjem u danom vremenu počevši od trenutka mirovanja jednak putu koji ono prijeđe jednolikim gibanjem, ali s brzinom kojoj se intenzitet utvrđuje u »srednjem trenutku vremena«. Tim dokazom on je izravno utjecao na Galileieva kinematička istraživanja.

U 15. stoljeću ideja indivizibila javlja se na jednom novom planu. NIKOLA KUZANSKI (1401-1464) upotrebljava je u svom mističnom *opisu* stvarnosti. Djelujući u ozračju oživljenog interesa za Platonovu filozofiju, pod neposrednim utjecajem novoplatonovaca, on pojam indivizibila povezuje s pojmom aktualne beskonačnosti i obavlja čitav niz suptilnih geometrijskih razmatranja kako bi za beskonačno malo i beskonačno veliko utvrdio podudarnost oprečnosti (*coincidentia oppositorum*).[56] S pomoću te osnovne zamisli Kuzanski govori i o Bogu i o svemiru, te tako, s panteizmom, izražava ideju *jedinstva*. Posebno se izjašnjava o beskonačnosti prostora i utvrđuje da njegovo središte može biti »bilo gdje«, što predstavlja važno odstupanje od aristotelizma. Što se tiče odnosa cjeline i dijela, on dijeli aristotelovsko mišljenje da se neprekidnina ne može sastaviti od točaka, ali pod utjecajem neoplatonizma objašnjava crtu kao *evolutio* ili *explicatio* točke, o kojoj katkad govori kao o protežnoj točki.[57]

Stavovi Nikole Kuzanskog o neprekinutosti i beskonačnosti naišla su na snažan odjek u 16. stoljeću. Osobito se to može reći za gledišta FRANJE PETRIŠEVIĆA

(Franciscus Patricius, 1529-1597), što ih je izložio u ranim geometrijskim radovima i konačno sustavno u glavnom djelu *Nova de universis philosophia* (*Nova sveopća filozofija*, 1591).[58] Neka gledišta Kuzanskoga on razvija ili preinačuje, a neka odbacuje, jer ih razmatra iz cjeline vlastitog filozofskog sustava. Poput Kuzanskoga on smatra aktualnim i beskonačno veliko i beskonačno malo, ali uvodi specifično razlikovanje najmanjeg nedjeljivog dijela prostora i nedjeljive točke koja ne pripada prostoru, ali jest u prostoru.[59] Odnos prostora i tvari ne izražava se stapanjem, nego specifičnim redoslijedom: prvo prostor, pa tek onda tvar, što otvara mogućnost da se o egzistenciji tvari tvrdi neovisno o egzistenciji mjesta ili prostora, kao i da se svojstva prostora i tvari zasebno proučavaju i oprečno opišu! Protivno Kuzanskom i neoplatonističkoj tradiciji on ne smatra crtu tijekom točke,[60] a protivno Kuzanskom i aristotelovskoj tradiciji on kritizira pojam neprekidnine u oba njezina definicijska oblika: povezanosti dijelova i beskonačnoj djeljivosti.[61]

Petriševićev istomišljenik u shvaćanju indivizibila i aktualne beskonačnosti nešto je mlađi GIORDANO BRUNO (1548-1600).[62] Sa zapitanošću filozofa i oduševljenjem pjesnika, ne i s pomnjivošću učenjaka, no uvijek u oporbi spram aristotelizma, on opisuje i opravdava jedinstveni, beskonačni svijet. Tomu u prilog on katkad navodi i matematički argument, kao što je ovaj kojim želi potvrditi ideju jedinstva:

> »Recite mi: što je pravcu različnije od kruga? Što je pravome oprečnije od svinutog? Ipak, oni se u principu i u najmanjem poklapaju; jer – kako je prekrasno zapazio Cusanus, otkrivač najljepših tajni geometrije – kakvu razliku možeš pronaći između najmanjeg luka i najmanje ravne niti? Osim toga u najvećem: kakvu razliku možeš pronaći između beskonačne kružnice i ravne linije? Zar ne opažate kako se zakrivljenost kružnice, što ona više raste, sve više približava pravoj crti? Stoga svakako treba reći i vjerovati: kao što je crta

> to ravnija što je veća, najveća od sviju mora biti u superlativu ravnija od svih ostalih; tako da najzad beskonačni pravac i beskonačna kružnica postanu jedno te isto.«[63]

Obrazloženje za jednakost beskonačne kružnice i beskonačnog pravca, te za jednakost najmanjeg kružnog luka i najmanje ravne crte u sklopu Brunove misli tek je jedno dalekosežno razumijevanje geometrijskih odnosa pod utjecajem učitelja Kuzanskoga, nipošto izgrađena matematička teorija. Isto tako je i s indivizibilom, do kojeg se prema Brunu dopire *diobom* neprekidnine i prema kojem vodi proces *spoznaje* stvari.

Dakle, i u 16. stoljeću, kao uostalom u cijelom vremenskom rasponu od 3. do 16. stoljeća, indivizibil se očituje kao plodna ideja za opis jedinstva svemira i tijek gibanja, a nije još postao egzaktnom metodom za sustavno istraživanje u matematici i fizici.

1.7. *Metoda indivizibilā*

Ključni zaokret u razumijevanju indivizibila nastupio je u 17. stoljeću.[64] Tome je zasigurno pogodovalo upoznavanje s glavnim Arhimedovim djelima. Prijevodi i komentari Arhimeda, osobito iz pera Francesca MAUROLICA (1548) i Federiga COMMANDINA (1558), potaknuli su povratak antičkoj metodi mjerenja površinā i tijelā sa zakrivljenim stranicama, a time i rješavanje mnogih matematičkih problema s neposrednom praktičnom primjenom, kao što je bio slučaj s određivanjem volumena i težišta tijelā. U oživljavanju i posuvremenjenju Arhimedova djela osobito se istaknuo Luca VALERIO (1552(?)-1618), »novi Arhimed našega doba« po Galileievim riječima. U djelu *De centro gravitatis solidorum* (*O težištu tijelā*, 1604) on je na temelju Arhimedova primjera za parabolični konoid sustavno istraživao sve sferoide i konoide i njihove odsječke nastale presjekom ravnine paralelne osnovici, a pritom je koristio opisane i upisane stepenaste likove, sastavljene od vrlo mnogo jednako širokih pravokutnika. Taj pristup obilježio je djela znanstvenikā u prvoj polovici 17. stoljeća. Štoviše, u svoje najvažnije rezultate ugradila su ga dvojica znanstvenika koji su bitno pridonijeli stvaranju nove filozofije prirode: Kepler i Galilei.

Johann KEPLER (1571-1630) u svom matematičkom radu *Nova stereometria doliorum vinarium* (*Nova stereometrija vinskih bačava*, 1615) promatra zakrivljenu površinu kao mnogokut s beskonačnim brojem stranica koje shvaća kao najmanje aktualno ostvarive dužine, a tijela razlaže na beskonačno mnogo najmanjih kolutova, tako da je blizu točnoj definiciji indivizibila. Ta shvaćanja koristi i u *astronomiji* kad na temelju podataka dobivenih motrenjem želi oblikovati zakone gibanja planetā. Kad u djelu *Astronomia nova* (1608) dokazuje da radijvektor planeta u jednakim vremenskim razmacima opisuje jednake površine, Kepler promatra isječak elipse kao zbroj vektorā položaja planeta, te zbog načina kako to radi uviđa da dobija tek približnu vrijednost površine isječka.

Galileo GALILEI (1564-1642) koristi indivizibil u drugom važnom području proučavanja – u *mehanici*. Pojam geometrijske nedjeljive kolikoće služi mu kao polazište za istraživanje kinematičkih svojstava gibanja. Inspiriran geometrijskom predodžbom brzine kod Oresmea on u svom čuvenom djelu *Discorsi* (1638) promatra put, koji tijelo prijeđe jednoliko ubrzanim gibanjem, kao trokut sastavljen od usporednih crta, a daljnjim matematičkim razmatranjem dolazi do novog važnog zaključka da se takvi putevi međusobno odnose kao kvadrati vremenskih razmaka u kojima ih tijelo prijeđe.

Indivizibil u Keplerovu i Galileievu djelu služi za izricanje pretpostavaka u rješavanju važnih problema unutar njihova glavnog znanstvenog interesa. Tek Bonaventura CAVALIERI (1598-1647), značajni Valerijev korespondent i neizravni

Galileiev učenik, utemeljuje *metodu indivizibilā* kao sredstvo sustavnog istraživanja u geometriji. On svoje osnovne rezultate postiže do 1629. godine, a objelodanjuje ih u svom glavnom djelu *Geometria indivisibilibus continuorum* (1635). Na neizbježno pitanje može li se neprekidnina sastaviti od nedjeljivih dijelova Cavalieri daje odgovor kojim izbjegava sučeljenje s aristotelovskim nasljeđem: neprekidnina i indivizibili su *raznorodni*. Neprekidnina je djeljiva u beskonačnost, a indivizibil je uvijek za dimenziju manji od neprekidnine koju gradi. Točka je indivizibil crte, crta indivizibil površine, površina indivizibil tijela. Iz te perspektive pitanje o sastavljanju neprekidnine postaje bespredmetno što se tiče primjenjivosti metode indivizibilā.[65]

U izgradnji metode Cavalieri polazi od predodžbe da se površina geometrijskog ravnog lika izražava s pomoću *ukupnosti* svih tetiva paralelnih jednoj, proizvoljno odabranoj tangenti njegovog oboda. Sve te tetive nastaju *tijekom* jedne uočene tetive po svim ostalim, a uočena tetiva naziva se *regula*. Ta se osnovna predodžba pojašnjuje definiranjem jednakosti dviju likova i formuliranjem osnovnih stavaka metode indivizibilā. Dvije su površine jednake ako su jednake tetive koje se nalaze na jednakoj udaljenosti od tangente. Dva osnovna stavka glase:

1. Ukupnost indivizibilā jedne te iste tvorevine neovisna je od izabrane regule.
2. Sadržaji dviju tvorevina odnose se kao ukupnosti njihovih indivizibilā. Ovim ukupnostima pripada određeni odnos ako svi odgovarajući indivizibili imaju isti taj odnos.

Tu Cavalieri razvija jedno novo poimanje sličnosti između geometrijskih tvorevina, općenitije od Euklidova, ali u konačnici neuspjelo s teorijskog stajališta jer zahtijeva uvođenje dodatnih postulata u odnosu na Euklidov sustav. Ali i u tim okvirima uspijeva mu izvesti čitav niz poučaka koji izražavaju odnos različitih konfiguracija indivizibilā, među kojima se osobito izdvajaju Cavalierijev princip za određivanje volumena tijela i rezultat od dalekosežnog povijesnog značenja koji u oznakama integralnog računa glasi:

$$a^{m+1} = (m+1) \int_0^a x^m \, dx.$$

U istom tom razdoblju GREGOIRE de St. VINCENT (1584-1667) razvija *metodu ekshaustije* u njezinu izvornom antičkom obliku u pokušaju da s maksimalnom strogošću riješi problem kvadrature kruga i čunjosječnicā. On ovladava numeričkom vještinom premjeravanja površinā 1625. godine, ali mu rukopis nestaje u praškom požaru, tako da mnogo kasnije objelodanjuje *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (*Geometrijsko djelo o kvadraturi kruga i čunjosječnicā*, 1647), koje je zahvalne čitatelje imalo u Leibnizu i Boškoviću. Tu on tvrdi da se opisivanjem i upisivanjem mnogokutā iscrpljuje površina zakrivljenog lika.

Cavalierijeva metoda indivizibilā i de St. Vincentova metoda ekshaustije pružaju izvrsnu priliku za usporedbu. Što je novo, a što staro u tim metodama? Na to pitanje odgovaraju Giles Persone de ROBERVAL (1602-1675) i Blaise PASCAL (1623-1662). Oni izričito tvrde da ono što može biti dokazano metodom indivizibilā može biti dokazano i metodom opisanih i upisanih likova starih Grka. Pascal se k tome opredjeljuje za *jezik* indivizibilā, ali tako da od Cavalierijeve »naivne« metode prelazi na jedan poboljšani postupak koji koristi *sume crtā* ili *sume ordinatā*, a pod tim crtama ili ordinatama on razumijeva beskonačno male pravokutnike koje razlikuje od indivizibilā. Pascal, primjerice, 1659. godine promatra polukrug, na njegovu promjeru uočava neodređeni broj točaka, iz njih povlači ordinate, u takvoj ordinati prepoznaje pravokutnik koji sadržava ordinatu i mali elementarni djelić promjera, te konačno tvrdi da suma tako shvaćenih ordinata tvori površinu koja se od površine polukruga razlikuje za kolikoću manju od bilo koje dane kolikoće.[66] A u tom razumijevanju već se nazire pojam granice i određenog integrala.

Pierre FERMAT (1601-1665) bitno proširuje područje primjene indivizibilā. Usvajajući stečevine Vietove algebre i Descartesove analitičke geometrije on prešutno prihvaća korespondenciju algebarskih i geometrijskih kolikoća, pa se to odražava i u uvođenju *numeričkog infinitezimala* kao brojevnog analogona geometrijskom indivizibilu. Fermat nigdje ne tumači što on podrazumijeva pod numeričkim infinitezimalom, ali ga svejedno uspješno koristi u rješavanju triju problema na koje su se usredotočila matematička istraživanja tijekom 17. stoljeća: problem određivanja maksimuma i minimuma algebarskih funkcija, problem tangente na krivulju i problem kvadrature (određivanje površine) zakrivljenog lika. Svi ti problemi pojavit će se u perspektivi infinitezimalne metode kao formalno srodni problemi, ali do pojave infinitezimalnog računa oni se s pomoću indivizibilā proučavaju zasebno ili na pojedinačnim slučajevima (kvadratrisa, parabola, hiperbola, logaritamske spirale). Odlika je Fermatova postupka da prilikom postavljanja problema u polazni algebarski izraz uključuje svoj infinitezimal, zatim provede sve potrebne algebarske transformacije, pa poslije njih priopći kako taj infinitezimal i eventualni umnošci s infinitezimalom iščezavaju. Fermat dobija rezultat tek nakon što prihvati da je infinitezimal jednak nuli, ali pritom ne daje objašnjenje zašto može tako postupiti.

1.8. *Zasnivanje infinitezimalne metode*

Metoda indivizibilā, u klasičnom Cavalierijevu izdanju ili u prilagodbama koje je doživjela u Pascalovim i Fermatovim radovima, kao i oživljena antička metoda ekshaustije iskazale su se kao uspješne metode u rješavanju brojnih matematičkih problema 17. stoljeća. Ali postavljale su izoštreno i neka otvorena pitanja. Ona se ponajprije tiču činjenice da se prilikom primjene tih metoda, primjerice pri izračunavanju površine zakrivljenog lika, prešutno prihvaća ili izričito postulira dostizanje konačne vrijednosti, odnosno podrazumijeva se kako se tom prilikom zbiva proces teženja prema *granici*. Tu se granični postupak javlja kao ideja, ne i kao *egzaktni* postupak koji vrijedi *općenito*, neovisno o predmetu proučavanja. Prijelomni trenutak novog razumijevanja granice i teženja prema granici nastupa tek s pojavom infinitezimalne metode.

Iz današnje perspektive do zasnivanja infinitezimalne metode dolazi posve *logično* zbog prikupljenih matematičkih spoznaja u sedamdesetim godinama 17. stoljeća. *Opća algebra* pripremila je put promatranju problema u općem obliku i omogućila da se matematička misao simbolički izrazi u svim fazama rješavanja problema. *Analitička geometrija* ukinula je aristotelovsku dihotomiju broja i geometrijske kolikoće tako što je u jednom nerazvijenom obliku uspostavila korespondenciju brojevnog i geometrijskog područja. *Teorija funkcijā* razvijala se u svojim brojnim zornim oblicima (određivanje tangente; izračunavanje duljine luka, površine, obujma; određivanje težišta) i te su narasle pojedinačne spoznaje težile prema jednom općem sistematiziranom pristupu.

Ali uvijek, pa tako i prilikom pojave infinitezimalne metode, valja u povijesti znanosti razlikovati *logičku strukturu* postignutog stupnja matematičkih spoznaja i *povijesni razvoj* u kojem se iz ljuske poznatog probija epohalna novost. U ovom slučaju povijesni razvoj teče u dva pravca. LEIBNIZ (1646-1716) razvija osnove diferencijalnog računa poopćenjem Pascalova razmatranja na bilo koju krivulju 1673. godine, a objavljuje ih tek 1684. godine u članku *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus* (*Nova metoda za maksimume i minimume kao i za tangente*). NEWTON (1643-1727) zamišlja metodu fluksijā 1665. godine pod utjecajem Fermata i svog učitelja Isaaca BARROWA (1630-1677), a prvi je put objelodanjuje u svom znamenitom djelu *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Matematički principi prirodne filozofije*, 1687).

Iz burnog razdoblja, u kojem se tek oblikovala infinitezimalna metoda, ovdje je potrebno prikazati Newtonov doprinos, i to u onom obliku u kojem ga je proučavao Ruđer Bošković u počecima svog matematičkog rada. Riječ je o *metodi prvih i posljednjih omjera* izloženoj u prvoj knjizi Newtonovih *Principia*.[67] Tu, u jedanaest lema i čuvenom sholiju poslije jedanaeste leme, Newton uvodi i obrazlaže svoje poimanje granice kao posljednjeg omjera kolikoćā koje iščezavaju i prvog omjera kolikoćā koje nastaju. Evo Newtonove izvorne zamisli graničnog procesa prema formulacijama i dokazima prvih dviju lema koje osnažuju metodu prvih i posljednjih omjera:

Lema I: Kvantiteti i omjeri kvantitetā, koji u bilo kojem konačnom vremenu neprestano teže jednakosti i prije kraja ovog vremena međusobno se približuju više od ma koje dane razlike, postaju napokon jednaki.

Ako to niječeš, pretpostavi da oni napokon postaju nejednaki i da je njihova posljednja razlika D. Dakle, oni se ne mogu približiti jednakosti više od dane razlike D, što je protivno pretpostavci.

Lema II: Neka u bilo koji lik AacE (sl. 4) ograničen ravnim crtama Aa, AE i krivuljom acE bude upisan proizvoljan broj paralelogramā Ab, Bc, Cd, itd. s jednakim osnovicama AB, BC, CD, itd. i visinama Bb, Cc, Dd, itd. paralelnim stranici Aa lika, i neka se dopune paralelogrami aKbl, bLcm, cMdn. Ako se pretpostavi da se širina ovih paralelograma smanjuje i njihov broj povećava *in infinitum*, kažem da posljednji omjeri koje međusobno imaju upisani lik AKbLcMdD, opisani lik AalbmcndoE i zakrivljeni lik AabcdE jesu omjeri jednakosti.

Sl. 4. Posljednji omjer upisanog i opisanog lika kao omjer jednakosti

Razlika upisanog i opisanog lika je zbroj paralelogramā Kl, Lm, Mn, Do. A to je zbog jednakosti njihovih osnovica pravokutnik nad jednom od njihovih osnovica Kb i zbrojem njihovih visina Aa, dakle pravokutnik ABla. A ovaj pravokutnik, budući da se po pretpostavci njegova širina smanjuje *in infinitum*, postaje manji od ma koje dane površine. Odatle, prema lemi I, upisani i opisani likovi napokon postaju međusobno jednaki, a postaje im napokon jednak i zakrivljeni lik koji se nalazi između njih. Q.E.D.

Odmah pada u oči da se Newton u polaznim lemama svoje metode ne odvaja od geometrijskih predodžaba. Dapače, on u sholiju smatra da je njegova metoda u usporedbi s Cavalierijevom metodom indivizibilā više u duhu geometrije, što je sve u skladu s osnovnom Newtonovom nakanom pri pisanju *Principia* da preispita svekoliko dotadašnje geometrijsko znanje. Prema Newtonovu tumačenju metodom prvih i posljednjih omjera postiže se sve ono što se postiže i metodom indivizibilā, ali na principijelno drugačiji način: ne s pomoću nedjeljivih kolikoća, već kolikoćā koje djeljivošću iščezavaju; ne preko suma i omjera *određenih* kolikoća, već preko graničnih vrijednosti ili posljednjih omjera tih suma i omjera.

Newton uviđa da se njegovoj metodi može prigovoriti kako uopće nema posljednjeg omjera koilikoćā kad one iščezavaju, jer *prije* nego iščeznu nema posljednjeg, a *nakon* što iščeznu nema omjera. Ali, kaže Newton, pod posljednjim omjerom kolikoćā koje iščezavaju ne razumijeva se omjer tih kolikoćā prije negoli iščeznu ili nakon što iščeznu, nego omjer *s kojim* iščezavaju.

Isto tako valja otkloniti gledište da je posljednji omjer kolikoćā koje iščezavaju omjer *posljednjih* kolikoća u procesu iščezavanja jer bi u tom slučaju one bile indivizibili s pomoću kojih bi se mogla sastaviti bilo koja kolikoća, dakako protivno Euklidovu dokazu o nesumjerljivim kolikoćama u desetoj knjizi *Elemenata*. Naprotiv, posljednji omjer kolikoćā koje iščezavaju predstavlja granicu kojoj se omjeri kolikoćā koje iščezavaju neprestano približuju i kojoj se može prići bliže od ma koje dane razlike, ali koju se nikad ne može dostići ili prekoračiti.

S Newtonovim razumijevanjem posljednjeg omjera pojam granice doživio je svoje prvo egzaktno određenje. Taj se pojam javlja kao posljednja iz niza znanstvenih stečevina u povijesnom razvoju problema neprekinutosti i beskonačnosti od antičke do Newtonove epohe.

Bilješke

[1] Iz opsežne literature izdvajam: Oskar Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung* (Frankfurt, 1975); Žarko Dadić, *Razvoj matematike: Ideje i metode egzaktnih znanosti u njihovu povijesnom razvoju* (Zagreb, 1975); N. Herold – W. Breidert – K. Mainzer, »Kontinuum, Kontinuität«, *Hist. Wb. Phil.* 4 (Basel/Stuttgart, 1976), cc. 1044-1062; R. Taton, *A general history of sciences*, Vol. 2 (London, 1967); W. Windelband, *Povijest filozofije* I (Zagreb, 1978).

[2] Građu potpuno i mjerodavno donosi H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, (Berlin, 1934), odnedavno i u hrvatskom prijevodu: H. Diels, *Predsokratovci. Fragmenti*, Zagreb 1983. Prilikom navođenja koristio sam taj prijevod, slobodno odstupajući od njega kad god sam uvidio da filozofsku ili matematičku misao pouzdanije izražava njemački prijevod. Standardna kratica VS.

[3] Anaksimandar, VS A 15, u: *Predsokratovci* I, p. 80. Usp. N. Herold, »Kontinuum, Kontinuität«, c. 1044.

[4] Parmenid, VS B 8, stihovi 22-25, u: *Predsokratovci* I, p. 212. Usp. Herold, a. c., c. 1045.

[5] Zenon Elejski, VS B 1, u: *Predsokratovci* I, p. 228. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 42.

[6] Zenon Elejski, VS B 3, u: *Predsokratovci* I, p. 229. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, pp. 42-43.

[7] Anaksagora, VS B 3, u: *Predsokratovci* II, p. 39. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 43.

[8] Anaksagora, VS B 6, u: *Predsokratovci* II, p. 40. Usp. N. Herold, a. c., c. 1045.

[9] O tome je u komentarima Aristotelove *Fizike* i *Analitike* prikupio građu: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, pp. 43-52.

[10] U Simplicijevu komentaru Aristotelove *Fizike*, prema: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 44.

[11] U Filiponovu komentaru Aristotelove *Fizike*, prema: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 45.

[12] U Temistijevu komentaru Aristotelove *Analitike*, prema: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 46.

[13] L. c.

[14] Navod donosi Campano iz Novarre u svom komentaru Euklidovih *Elemenata*. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 50.

[15] Tako i [Ruđer Bošković], *De natura, et usu infinitorum, et infinite parvorum*, (Romae, 1741), n. 2.

[16] Filolaj, VS B 3, u: *Predsokratovci* I, p. 358; usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 105; M. Gatzemeier, »Grenze (Peras)«, Hist. Wb. Phil. 4, c. 874.

[17] Filolaj, VS B 1, u: *Predsokratovci* I, 1. c.; usp. Becker, 1. c.

[18] Demokrit, VS B 155, u: *Predsokratovci* II, pp. 169-170; usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 56.

[19] Platon, *Timaj*, 30d-31a.

[20] Platon, *Timaj*, 35b-36b. Usp. Rivaudovo tumačenje u: Platon, *Timaj* (Beograd, 1981), pp. 148-149.

[21] Platon, *Timaj*, 37ab.

[22] Cjelokupno razmatranje o toj temi donosi: Platon, *Timaj*, 53a-57d, a analizu tog razmatranja: Branko Pavlović, »Tajne dijaloga Timaj«, predgovor u: Platon, *Timaj* (Beograd, 1981), pp. 35-41.

[23] Platon, *Timaj*, 53cd.

[24] Aristotel, *Fizika* III, 6. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 67.

[25] Platon, *Fileb*, 25ab. Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 80.

[26] Usp. Gatzemeier, »Grenze (Peras)«, Hist. Wb. Phil. 4, c. 874; W. Windelband, *Povijest filozofije* I, p. 173.

[27] Platon, *Parmenid*, 156a-156e, odlomak poznat u filozofskoj literaturi kao druga (treća) hipoteza. Istražujući dijalektiku ideja u drugom dijelu dijaloga *Parmenid*, filozofski aspekt tog odlomka obradio je: Zvonko Posavec, *Dijalektika i politika* (Zagreb: Politička misao, 1979), pp. 127-137.

[28] Platon, *Parmenid*, 161de. Prijevod preuzet iz: Posavec, *Dijalektika i politika*, p. 143.

[29] Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 47.

[30] Aristotel, *Fizika* III, 206 a 12.

[31] Izbor Aristotelovih tekstova o neprekinutosti i beskonačnosti sadržava: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, pp. 64-77. Usp. analize Aristotelovih gledišta u: Željko Marković, »Beskonačni postupci u Aristotela«, *Rad JAZU* 292 (1953), pp.

117-131; Žarko Dadić, *Razvoj matematike* (Zagreb: Školska knjiga, 1975), u poglavlju »Razdvajanje aritmetike i geometrije – pojam neprekinutosti i beskonačnosti«, pp. 59-62; N. Herold, »Kontinuum, Kontinuität«, Hist. Wb. Phil. 4, cc. 1045-1047.

[32] Aristotel, *Fizika* III, 203 b 15-32.

[33] Aristotel, *Fizika* III, 206 a 17.

[34] Aristotel, *Fizika* III, 206 a 27-29.

[35] Aristotel, *Fizika* III, 207 b 1-5.

[36] Aristotel, *Fizika* V, 227 a 10.

[37] Aristotel, *Fizika* V, 227 a 16-20.

[38] Aristotel, *Fizika* VI, 231 b 2-7.

[39] Aristotel, *Fizika* VI, 232 b 24-25.

[40] Aristotel, *Fizika* VI, 231 a 24.

[41] Aristotel, *Fizika* VI, 231 a 18-232 a 22; 232 b 14-233 a 12, gdje se iscrpno izlažu odnosi osnovnih fizičkih kolikoća: puta, gibanja i vremena.

[42] Usp. Windelband, *Povijest filozofije* I, pp. 221-222; N. Herold, a. c., c. 1047.

[43] Izbor ključnih prirodnofilozofskih stoičkih fragmenata iz von Arnimova zbornika *Stoicorum Veterum Fragmenta* (Leipzig, 1903) objelodanio je: Shmuel Sambursky, *Der Weg der Physik* (München, 1978), pp. 131-138. Prikaze stoičke filozofije prirode, posebno shvaćanje neprekinutosti, vidi u: Windelband, *Povijest filozofije* I, pp. 222-224; Sambursky, »Stoic continuum theory and Boscovich's concept of force«, u: *Actes du Symposium international R. J. Bošković 1961*, pp. 103-105; Sambursky, *Der Weg der Physik*, pp. 65-66; N. Herold, a. c., c. 1047.

[44] Sekst Empirik, *Stoicorum Veterum Fragmenta* (= SVF) II 1013. Vidi Sambursky, *Der Weg der Physik*, pp. 131-132.

[45] Hrizip, SVF II 916. Vidi N. Herold, a. c., c. 1047.

[46] Plutarh, SVF II 485. Vidi Sambursky, *Der Weg der Physik*, p. 136.

[47] Plutarh, SVF II 519. Vidi Sambursky, *Der Weg der Physik*, p. 136.

[48] Plotin, *Eneade* VI, 9, 1. Vidi Branko Bošnjak, *Filozofija od Aristotela do renesanse* (Zagreb: Matica hrvatska, 1978), p. 179.

[49] Plotin, *Eneade* IV, 2, 1. Vidi N. Herold, a. c., c. 1048.

[50] Plotin, *Eneade* VI, 9, 4. Vidi Bošnjak, *Filozofija od Aristotela do renesanse*, p. 183.

[51] Usp. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, p. 144.

[52] Euklid, *Elementi* XI, def. 14, 18, 20, 21, 23 (Beograd: SANU, 1957), p. 10.

[53] Albert Veliki, *In Phys.* VI, tr. 1, c. 1. Vidi W. Breidert, »Kontinuum, Kontinuität«, *Hist. Wb. Phil.* 4, c. 1049.

[54] Toma Akvinski, *In phys.* III, 1. Vidi W. Breidert, 1. c.

[55] Nicole Oresme, *Quaestiones disputatae de Euclidis elementis*, quaest. 8; Nicole Oresme, *Tractatus de configuratione intensionum*, pars III, cap. 7. Izbor temeljnih tekstova donosi: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, pp. 131-134. Vidi i tumačenje u: Dadić, *Razvoj matematike*, pp. 107-110.

[56] Usp. Filipović, *Filozofija renesanse* (Zagreb, 1978), pp. 51-52.

[57] Nicolaus Cusanus, *De docta ignorantia* II, 3. Vidi W. Breidert, a. c., c. 1051.

[58] Petriševićevi stavovi o neprekinutosti i beskonačnosti posebno su istraživani u: Žarko Dadić, *Razvoj matematike* (Zagreb, 1975), p. 129; Žarko Dadić, »Frane Petrić o pojmu neprekinutosti i beskonačnosti«, *Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine* 5 (1979), pp. 161-167; Žarko Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti*

u Hrvata I (Zagreb: Liber, 1982), pp. 116-121.

59 Franciscus Patricius, *Nova de universis philosophia*, f. 66.2. Vidi Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* I, u poglavlju »Neoplatonistička prirodna filozofija Franje Petriševića«, p. 119.

60 Patricius, *Nova de universis philosophia*, f. 66.4. Vidi Dadić, »Neoplatonistička prirodna filozofija Franje Petriševića«, p. 120.

61 Patricius, *Nova de universis philosophia*, f. 67.2. Vidi Dadić, »Neoplatonistička prirodna filozofija Franje Petriševića«, pp. 117-118.

62 O pitanju utjecaja Franje Petriševića na Giordana Bruna vidi: Filipović, *Filozofija renesanse*, p. 107 i 118; Dadić, *Povijest egzaktnih znanosti u Hrvata* I, pp. 120-121.

63 Giordano Bruno, *De la causa, principio e uno*, peti dijalog. Vidi Filipović, *Filozofija renesanse*, p. 287. Prijevod izmijenjen!

64 O metodi indivizibilā vidi: Becker, *Grundlagen der Mathematik*, pp. 144-145; Dadić, *Razvoj matematike*, pp. 146-148, 152-159; J. Itard, »From Symbolic Algebra to Infinitesimal Calculus«, u: R. Taton, *A general history of the sciences* II (London, 1967), pp. 215-217.

65 Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continorum* (Bononiae, 1653), p. 111. Vidi W. Breidert, a. c., c. 1051.

[66] Usp. Itard, »From Symbolic Algebra to Infinitesimal Calculus«, pp. 216-217.

[67] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1. 1, leme I-XI. Vidi Becker, *Grundlagen der Mathematik*, pp. 150-152; Itard, »From Symbolic Algebra to Infinitesimal Calculus«, pp. 225-226.